

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală a județului Alba, 13 februarie 2015

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE - CLASA a VI-a

Problema 1. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuațiile:

- a) $\frac{x+3^2-2}{3} + \frac{x+5^2-2}{5} = 8.$
b) $\frac{x-2+3^2}{3} + \frac{x-2+5^2}{5} + \frac{x-2+7^2}{7} + \dots + \frac{x-2+197^2}{197} + \frac{x-2+199^2}{199} = 9999.$

Soluție. a) $x = 2$ 2 puncte
b) $\frac{x-2}{3} + 3 + \frac{x-2}{5} + 5 + \frac{x-2}{7} + 7 + \dots + \frac{x-2}{199} + 199 = 9999$ 2 puncte
 $(x-2) \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{199} \right) + 9999 = 9999$ 2 puncte
 $x = 2$ 1 punct

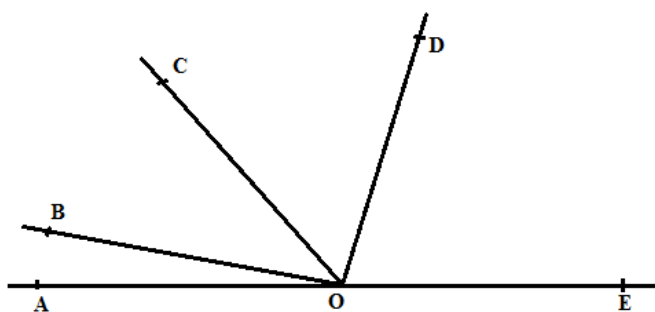
Problema 2. Se consideră numerele naturale $a = n \cdot (n+1) \cdot (n+2) + 8$ și $b = 6^a$, unde n este un număr natural oarecare.

- a) Arătați că numărul 36 se poate scrie ca sumă de trei cuburi perfecte.
b) Determinați restul împărțirii lui a la 3.
c) Arătați că numărul b se poate scrie ca sumă de trei cuburi perfecte.

Soluție. a) $36 = 1^3 + 2^3 + 3^3$ 2 puncte
b) $n \cdot (n+1) \cdot (n+2) : 3$ 2 puncte
 $r = 2$ 1 punct
c) $a = 3k + 2, k \in \mathbb{N}$ 1 punct
 $b = 6^{3k+2} = 6^{3k}(1^3 + 2^3 + 3^3) = (6^k)^3 + (2 \cdot 6^k)^3 + (3 \cdot 6^k)^3$ 1 punct

Problema 3. Determinați consideră unghiurile adiacente $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$ și $\angle DOE$ astfel încât punctele E, O și A să fie coliniare. Știind că: $4 \cdot m(\angle AOB) = m(\angle BOC)$, $m(\angle BOC) = \frac{4}{5} \cdot m(\angle COD)$ și $\frac{m(\angle DOE)}{8} = \frac{m(\angle COD)}{5}$. Determinați măsurile unghiurilor $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$ și $\angle DOE$.

Soluție. Cazul 1. $O \in (AE)$



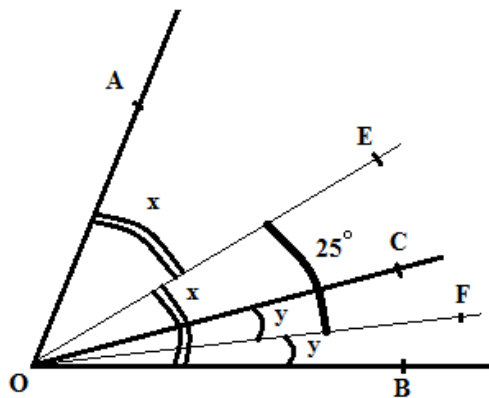
$\left. \begin{aligned} m(\angle AOB) &= x \\ m(\angle BOC) &= 4x \\ m(\angle COD) &= 5x \\ m(\angle DOE) &= 8x \end{aligned} \right\}$ 2 puncte
 $x + 4x + 5x + 8x = 180^\circ$ 1 punct
 $x = 10^\circ$ 1 punct
 $m(\angle AOB) = 10^\circ, \quad m(\angle BOC) = 40^\circ$
 $m(\angle COD) = 50^\circ, \quad m(\angle DOE) = 80^\circ$ 1 punct

Cazul 2. $A \in (OE)$ sau $E \in (OA)$ se acordă 2 puncte. În cazul în care un elev rezolvă doar cazul 2 se acordă 5 puncte pentru acest caz.

Problema 4. Două unghiuri complementare au o latură comună și bisectoarele lor determină un unghi de 25° . Se acceptă că una din laturile celor două unghiuri aparține interiorului unghiului format de cele două bisectoare.

- Demonstrați că cele două unghiuri nu pot fi adiacente.
- Determinați măsurile celor două unghiuri.

Soluție.



a) Dacă sunt adiacente, atunci $m(\angle EOF) = 45^\circ$. Contradicție cu ipoteza. 3 puncte

b) Folosind notațiile de pe figură și ipoteza avem:

$$x - y = 25^\circ; 2x + 2y = 90^\circ \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$\text{Finalizare } m(\angle AOB) = 70^\circ \text{ și } m(\angle BOC) = 20^\circ$$

..... 2 puncte